

# INTEGRACION NUMERICA

## Método se Simpson

---

Ing Yamil Armando Cerquera Rojas - [yacerque@gmail.com](mailto:yacerque@gmail.com)  
Especialista en Sistemas Universidad Nacional  
Docente Universidad Surcolombiana  
Neiva - Huila

Objetivos: Generales y Específicos  
Observaciones Preliminares  
Calculo de Áreas  
El método de Simpson  
Desarrollo del modelo de Simpson  
Ejemplos  
Programa en diferentes lenguajes  
La jerarquía de clases

---

### **OBJETIVOS GENERALES**

Objetivos: Resolver el problema de cálculo del área bajo la curva entre dos límites conocidos, dividiendo en N sub áreas para calcular su valor, asumiendo cada sub área como un pequeño arco de parábola.

1. Comprender las bases conceptuales de la integración aproximada.
2. Comprender los rasgos generales de la integración aproximada utilizando el método de Simpson.
3. Comprender la aproximación del error por truncamiento de la integración aproximada utilizando el método de Simpson, frente al valor exacto.
4. Resolver problemas de integración aproximada utilizando el método de Simpson.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Conocer la interpretación geométrica de la integral definida.
2. Reconocer que el método de Simpson representa, geoméricamente, el área bajo una función polinomial de segundo orden (Cuadrática o Parabólica).
3. Deducir la fórmula de Simpson a partir de la interpretación geométrica de la integral definida.
4. Acotar el error cometido en la integración numérica por el método de Simpson.
5. Explicar la obtención de fórmulas más precisas para calcular, numéricamente, integrales definidas.
6. Aplicar el método de Simpson, para calcular numéricamente, las aproximaciones de algunas integrales definidas.

---

## OBSERVACIONES PRELIMINARES

Cuando se realiza un experimento, generalmente, se obtiene una tabla de valores que se espera, tengan un comportamiento funcional.

Sin embargo, no se obtiene la representación explícita de la función que representa la regla de correspondencia entre las variables involucradas.

En estos casos, la realización de cualquier operación matemática sobre la nube de puntos que pretenda tratarla como una relación funcional, tropezará con dificultades considerables al no conocerse la expresión explícita de dicha relación. Entre estas operaciones se encuentra la integración de funciones.

Además, es conocido que existen relativamente pocas fórmulas y técnicas de integración, frente a la cantidad existente de funciones que se pueden integrar. Es decir, un gran número de integrales de funciones elementales no puede ser expresada en términos de ellas. Entre estos casos singulares se tienen, a manera de ejemplo:

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \sqrt{1+x^3} dx, \int \sin(x^2) dx, \int \sqrt{1+x^4} dx, \dots$$

Para aclarar la contradicción antes señalada, se debe recordar la condición necesaria para que una función sea integrable. Dicha condición se menciona de inmediato, sin demostración:

### **Proposición 1 (Condición necesaria de Integrabilidad).**

Si una función  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$ , entonces la función  $f$  es integrable en el intervalo  $[a, b]$ .

No obstante que las condiciones de la proposición 1 son sumamente generales, no se tiene garantía de que, al aplicar los métodos usualmente conocidos para resolver integrales, se pueda encontrar la antiderivada de una función  $f(x)$  cualquiera necesaria para obtener la integral definida.

Estos apuntes pretenden ilustrar al lector de forma detallada y lo mas sencillo posible, una de las técnicas básicas que permiten resolver dicha situación, haciendo uso de los métodos o modelos numéricos, a través de la denominada “INTEGRACIÓN APROXIMADA, POR EL MÉTODO DE SIMPSON”.

## CÁLCULO DE ÁREAS

Uno de los problemas matemáticos más frecuentes es el cálculo del área que se forma entre una función  $f(x)$ , el eje  $x$  y los límites  $a$  y  $b$ . Por ejemplo, se necesita calcular el área  $A$  que aparece en la **Fig. 1**, reiterando que dicha área esta por debajo de la función  $f(x)$  entre los límites  $a$  y  $b$ :

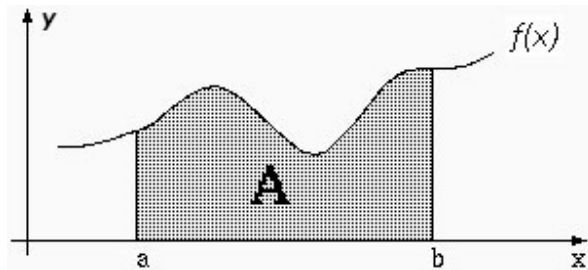


Fig. 1

Partiendo del hecho que la función  $f(x)$  y los valores  $a$  y  $b$  son conocidos.  $a$  se considera como el limite inferior y  $b$  se considera como límite superior.

En este tipo de problemas se pueden obtener dos tipos de soluciones:

- ✓ Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula precisa y exacta para el área solicitada.
- ✓ Soluciones numéricas: se calcula numéricamente una estimación del área.

Desde luego, la soluciones algebraicas son mejores que las numéricas, porque son exactas. Pero a veces, la complejidad de las funciones hace imposible (o difícil) obtener la solución algebraica, por lo que una solución numérica permite ahorrar tiempo.

## EL MÉTODO DE SIMPSON

Además de aplicar la regla trapezoidal o Rectangular con segmentos o sub áreas cada vez más pequeñas, otra manera de obtener una estimación aún más exacta de una integral, es la de usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, en el caso particular del método que usa orden 2, es decir de la forma  $ax^2 + bx + c$ .

A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les conoce como reglas de Simpson.

En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura  $2h$ , comprendido entre  $x_i$  y  $x_{i+2}$ , y se sustituye la función  $f(x)$  por la parábola que pasa por tres puntos

$(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , y  $(x_{i+2}, y_{i+2})$ . El valor del área aproximada, sombreada en la figura, se calcula con un poco más de trabajo y el resultado es  $\frac{h}{3}[y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}]$ , que se demuestra en seguida.

## DESARROLLO DEL MODELO DE SIMPSON:

Para efectos de la demostración del método de Simpson, se asume cada sub área como un pequeño arco de parábola de la forma  $ax^2 + bx + c$  con límites así: Límite inferior en  $-h$ , límite superior en  $h$ , por ende la mitad de la pequeña sub área se encontrará en el Punto 0, tal como se ilustra en Fig. 2.

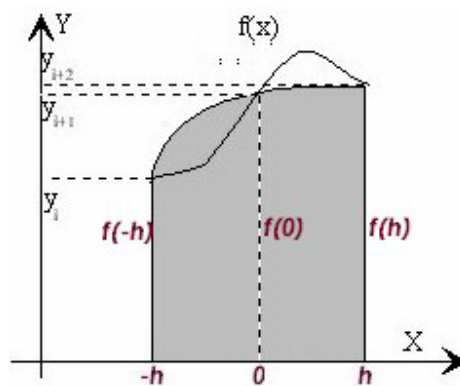


Fig. 2

Se procede a integrar dicho arco de parábola entre los límites descritos se tendrá:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c)dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \Big|_{-h}^h$$
, reemplazando cada uno de los límites, se tiene:

$$\left[ \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch \right] - \left[ -\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch \right]$$
, ahora destruyendo paréntesis se tendrá:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{3} + 2ch$$
, simplificando un poco la solución se obtendrá la ecuación 1 que se muestra a continuación.

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 6c] \quad \text{Ec 1}$$

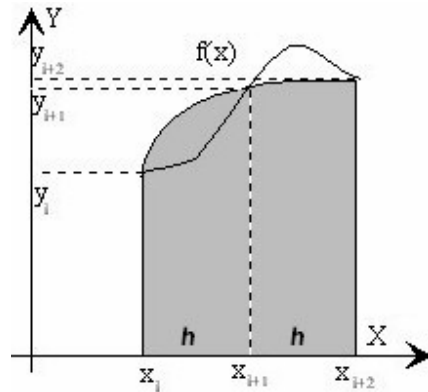


Fig. 3

Observando la Fig 3, en lo que respecta a las notaciones, se puede decir que  $f(x_i) = y_i = f(-h)$ ,  $f(x_{i+1}) = y_{i+1} = f(0)$ ,  $f(x_{i+2}) = y_{i+2} = f(h)$ , Entonces se podría obtener el siguiente sistemas de ecuaciones, evaluando la ecuación general de la parábola  $ax^2 + bx + c$  en cada uno de los puntos de la pequeña sub área  $[-h, 0-h]$ :

$$f(-h) = ah^2 - bh + c, \text{ se puede tomar esta altura como } y_0 = f(x_i)$$

$$f(0) = c, \text{ se toma esta altura como } y_1 = f(x_{i+1})$$

$$f(h) = ah^2 + bh + c, \text{ y esta altura como } y_2 = f(x_{i+2})$$

De lo anterior se puede decir que:

$$y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c \quad \text{Ec 2}$$

$$y_1 = c \quad \text{Ec 3}$$

Retomando la **Ec 1** se puede expresar igualmente de la siguiente manera:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [2ah^2 + 2c + 4c] \quad \text{Ec 4}$$

Reemplazando las ecuaciones 2 y 3 en la **Ec 4** se tiene que:

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] = A_1 \quad \text{Ec 5}$$

Interpretando la ecuación **Ec 5** con base en la sub área seleccionada  $A_1$  para desarrollar el modelo de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo mas cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área mas la función evaluada en el lado derecho de la sub área, todo esto multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

La simple inspección visual de esta figura y la que describe el procedimiento de los trapecios o los rectángulos, confirma que el método de Simpson deberá ser mucho más exacto que los procedimientos mencionados.

Si a y b se denominan como  $x_0$  y  $x_2$ , y  $f_i(x_i)$  se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, entonces la integral es:

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$I = (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \quad \text{Ec 5a}$$

Si se toma  $(b-a)/6 \approx h/3$ ,  $f(x_0) = y_0$ ,  $f(x_1) = y_1$ , y  $f(x_2) = y_2$ , entonces se tiene como solución de la sub área  $I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ , que sería lo mismo mostrado en la ecuación 5.

Ahora, se sabe que el área que se desea encontrar sería la sumatoria de todas las sub áreas que se calculen. Al igual que los métodos de la regla trapezoidal y de la regla rectangular, entre mas sub áreas tenga la integral a calcular, mas exacto será el valor encontrado. El área aproximada en el intervalo  $[a, b]$  es:

$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$ , ahora dejando esta ecuación en términos de la ecuación 5 se tendrá:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Simplificando  $h/3$  y sumando los términos se tendrá:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

donde  $n$  sería el número de sub áreas en el cual se ha dividido el área que se desea calcular.

A manera de ejemplo, si el área a calcular se hubiera dividido en 4 Sub áreas entonces en términos de  $y$  la solución sería:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8)$$

Bien, dependiendo como se agrupen los términos se llegaría a expresar la solución de dos maneras:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] \quad \text{Ec 6}$$

ó

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 - y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] \quad \text{Ec 7}$$

Los primeros términos del paréntesis, contienen los valores de la evaluación de la función en los extremos, el segundo, la suma de los términos de índice impar, y el tercero la suma de los términos de índice par.

Las dos ecuaciones se pudieran representar en términos de sumatorias de la siguiente manera.

La **Ec 6**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^n y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right] \quad \text{Ec 8}$$

La **Ec 7**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ y_0 - y_{2n} + \sum_{i=1}^n [4y_{2i-1} + 2y_{2i}] \right] \quad \text{Ec 9}$$

Para efectos de programación y en lo que respecta a mi concepto personal, es mejor la solución representada como **Ec 9** y con ella se continúa el trabajo. Hay que tener en cuenta que  $n$  es el número de sub áreas en la que se divide el área total a calcular y  $h = dx/2$ .

Ahora lo que se conoce en un momento determinado, cuando se desea calcular el valor de la integral definida, son los siguientes términos:

$a$  = Límite inferior

$b$  = Límite Superior

$n$  = Número de sub áreas

$f(x)$  La función sobre la cual se desea integrar.

Con los valores anteriores se puede calcular el valor de  $dx$  así:  $dx = (b - a)/n$  y  $h = dx/2$ .

En necesario entonces dejar la ecuación en términos de  $f(x)$ ,  $a$ ,  $b$  y  $dx$  ó  $h$  así:

Los primeros términos:  $y_0 = f(a)$  y  $y_{2n} = f(b)$

Analizando ahora los términos impares:  $y_1 = f(a + 1dx/2)$ ,  $y_3 = f(a + 3dx/2)$ ,  $y_5 = f(a + 5dx/2)$ , por tanto se tendría de manera general:

$y_{2i-1} = f(a + (2i - 1)dx/2)$	ó	$y_{2i-1} = f(a + (2i - 1)h)$	<b>Ec 10</b>
----------------------------------	---	-------------------------------	--------------

Analizando ahora los términos pares:  $y_2 = f(a + 1dx)$ ,  $y_4 = f(a + 2dx)$ ,  $y_6 = f(a + 3dx)$ , por tanto se tendría de manera general:

$y_{2i} = f(a + idx)$	ó	$y_{2i} = f(a + 2ih)$	<b>Ec 11</b>
-----------------------	---	-----------------------	--------------

Dejando la ecuación **Ec 9** en términos de lo expresado en las ecuaciones **Ec 10** y **Ec 11** se tendrá en forma definitiva la solución así:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(a) - f(b) + \sum_{i=1}^n [4f(a + (2i-1)dx/2) + 2f(a + idx)] \right] \quad \text{Ec 12}$$

## Ejemplos

**Ejemplo 1:** Utilizar la regla de Simpson para aproximar la integral:  $\int_0^1 e^{x^2} dx$ .

Tenga en cuenta que el valor real es 1.4626...

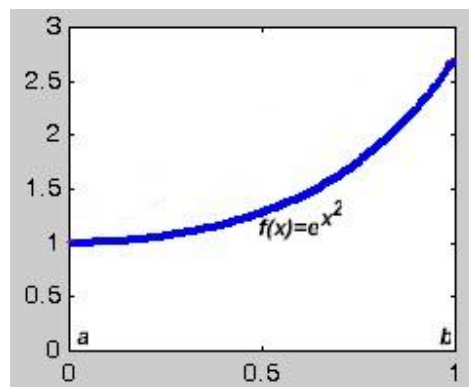


Fig. 4

**Solución:** Usando la fórmula directamente con los siguientes datos:

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$f(x) = e^{x^2}$$

Si se asume el área a calcular como un solo arco de parábola, se tendría entonces que  $dx = (b - a)/1 = 1$  ó  $h = (dx/2) = 0.5$  y aplicando la ecuación Ec 5 se tiene que:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2] = A$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.5}{3} [e^{0^2} + 4e^{0.5^2} + e^{1^2}]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{0.5}{3} [1 + 4(1.2840) + 2.7183]$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = 1.4757$$

Ahora si compara los resultados obtenidos al aplicar la regla del Trapecio o la regla de los Rectángulos, con respecto al valor real y al valor obtenido por la regla de Simpson tendría que analizar lo siguiente:

Integral	Valor Real	Rectangular	Trapezoidal	Simpson
$f(x) = e^{x^2}$	1.4626	1.2840	1.8591	1.4757
<b>Er</b>		12.21%	27.11%	0.90%
<b>Ea</b>		0.1786	0.3965	0.0131

Vale la pena aclarar que para los tres métodos se trabajó una sola sub área.

Desarrollado en MatLab se tendría el siguiente resultado.

```

>>syms x
>>f=exp(x^2);
>>integral=int(f)
integral =
-1/2*i*pi^(1/2)*erf(i*x)

```

ERF Error de la función.

Y = ERF(X) es el error de la función para cada elemento de X. X debe ser real. El error de la función está definido como:

$$\text{erf}(x) = 2/\text{sqrt}(\pi) * \text{integral desde } 0 \text{ a } x \text{ de } \exp(-t^2) dt. \text{ Analice lo anterior.}$$

**Ejemplo 2:** Aplicar la regla de Simpson para aproximar la integral  $\int_0^1 e^{x^2} dx$  si se subdivide el área total en 5 intervalos.

**Solución:** En este caso, se identifica  $n = 5$ , y las particiones generadas estarían delimitadas por los puntos  $P=\{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$  sobre el eje x.

Así, aplicando la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + 4y_9 + y_{10})$$

Si se asume el área a calcular como cinco pequeños arcos de parábola, se tendría entonces que  $dx = (b - a)/5 = 0.2$  ó  $h = (dx/2) = 0.1$  y aplicando la ecuación **Ec 7** se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})]$$

$$y_0 = f(a) = e^{a^2} = e^{0^2} = 1, \quad y_{2n} = y_{10} = f(b) = e^{1^2} = 2.7183$$

Los términos impares se encontrarían de acuerdo con la fórmula  $y_{2i-1} = f(a + (2i - 1)h) = f(x_i)$  así:

$$y_1 = f(h) = f(0.1) = e^{0.1^2} = 1.0101$$

$$y_3 = f(3h) = f(0.3) = e^{0.3^2} = 1.0942$$

$$y_5 = f(5h) = f(0.5) = e^{0.5^2} = 1.2840$$

$$y_7 = f(7h) = f(0.7) = e^{0.7^2} = 1.6323$$

$$y_9 = f(9h) = f(0.9) = e^{0.9^2} = 2.2479$$

Y la sumatoria igual a: 7.2685

Los términos pares se encontrarían de acuerdo a la fórmula  $y_{2i} = f(a + 2ih)$  así:

$$y_2 = f(a + 2h) = f(0.2) = e^{0.2^2} = 1.0408$$

$$y_4 = f(a + 4h) = f(0.4) = e^{0.4^2} = 1.1735$$

$$y_6 = f(a + 6h) = f(0.6) = e^{0.6^2} = 1.4333$$

$$y_8 = f(a + 8h) = f(0.8) = e^{0.8^2} = 1.8965$$

$$y_{10} = f(a + 10h) = f(1) = e^{1^2} = 2.7183$$

Y la sumatoria igual a: 8.2624

Por tanto el valor de la integral será igual a:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{0.1}{3} [1 - 2.7183 + 4(7.2685) + 2(8.2624)] = 1.4627$$

Integral	Valor Real	Rectangular	Trapezoidal	Simpson
$f(x) = e^{x^2}$	1.4626	1.4537	1.48065	1.4627
<b>Er</b>		0.6085%	1.2375%	0.0068%
<b>Ea</b>		0.0089	0.0181	0.0001

**Ejemplo 3:** Usar la regla de Simpson para aproximar la integral:  $\int_2^4 \frac{e^x}{x} dx$ .

**Solución:** Igual que en el ejemplo anterior, se sustituyen los datos de manera directa en la fórmula de Simpson dividiendo el área en cuatro (4) sub áreas. En este caso, se tienen los datos:

$$\begin{aligned} a &= 2, b = 4, n = 4 \\ f(x) &= e^x / x \\ dx &= (4-2)/4 = 0.5 \\ h &= dx/2 = 0.25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})]$$

$$y_0 = f(a) = e^a / a = e^2 / 2 = 3.6945, \quad y_{2n} = y_8 = f(b) = e^4 / 4 = 13.6495$$

Los términos impares se encontrarían de acuerdo con la fórmula  $y_{2i-1} = f(a + (2i - 1)h) = f(x_i)$  así:

$$y_1 = f(a + h) = f(2 + 0.25) = e^{2.25} / 2.25 = 4.2168$$

$$y_3 = f(a + 3h) = f(2.75) = e^{2.75} / 2.75 = 5.6882$$

$$y_5 = f(a + 5h) = f(3.25) = e^{3.25} / 3.25 = 7.9355$$

$$y_7 = f(a + 7h) = f(3.75) = e^{3.75} / 3.75 = 11.3390$$

Y la sumatoria igual a: 29.1795

Los términos pares se encontrarían de acuerdo a la fórmula  $y_{2i} = f(a + 2ih)$  así:

$$y_2 = f(a + 2h) = f(2.5) = e^{2.5} / 2.5 = 4.8730$$

$$y_4 = f(a + 4h) = f(3.0) = e^{3.0} / 3.0 = 6.6952$$

$$y_6 = f(a + 6h) = f(3.5) = e^{3.5} / 3.5 = 9.4616$$

$$y_8 = f(a + 8h) = f(4.0) = e^{4.0} / 4.0 = 13.6495$$

Y la sumatoria igual a: 34.6793

Por tanto el valor de la integral será igual a:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{0.25}{3} [3.6945 - 13.6495 + 4(29.1795) + 2(34.6793)] = 14.6768$$

**Ejemplo 4:** Evaluar la función  $\int_0^{1.2} f(x)dx$ , usando la siguiente tabla:

x	0	0.10	0.30	0.50	0.70	0.95	1.20
f(x)	0	6.84	4.00	4.20	5.51	5.77	1.0

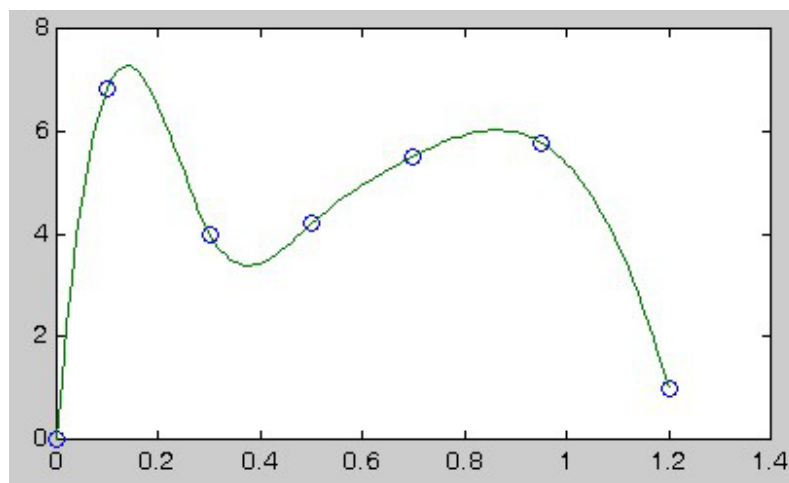


Fig 5

**Solución.**

Observe en la fig 5 que en el intervalo  $[0,0.1]$  se puede aplicar la regla del trapecio, en el intervalo  $[0.1,0.7]$  la regla de Simpson de 3/8 y en el intervalo  $[0.7,1.2]$  la regla de Simpson de 1/3. Así, se tienen las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{0.1} f(x)dx = \frac{0.1-0}{2} [f(0) + f(0.1)] = 0.842$$

$$I_2 = \int_{0.1}^{0.7} f(x)dx = \frac{0.7-0.1}{8} [f(0.1) + 3f(0.3) + 3f(0.5) + f(0.7)] = 2.7712$$

$$I_3 = \int_{0.7}^{1.2} f(x)dx = \frac{1.2-0.7}{6} [f(0.7) + 4f(0.95) + f(1.2)] = 2.4658$$

Finalmente, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_0^{1.2} f(x)dx = 0.842 + 2.7712 + 2.4658 = 6.079$$

**Ejemplo 5:** Calcula la integral  $\int_{-1}^{3.25} f(x)dx$ , usando la siguiente tabla de datos:

x	-1	-0.5	0	1	1.75	2.5	3.25
f(x)	2	-3	1.5	-1	0.5	0.75	-2

Si se desarrolla la gráfica con Matlab ajustando los datos de la tabla anterior mediante splines cúbicos, se tendría lo siguiente:

- » `x=[-1 -0.5 0 1 1.75 2.5 3.25];`
- » `y=[2 -3 1.5 -1 0.5 0.75 -2];`
- » `xx=-1:0.01:3.5;`
- » `yy=spline(x,y,xx);`
- » `plot(x,y,'o',xx,yy)`

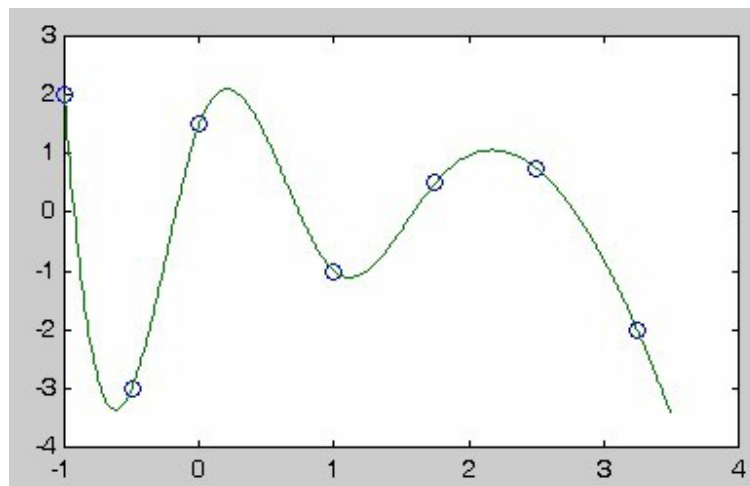


Fig. 6

**Solución combinando varios métodos de integración.**

Para este caso, se puede aplicar la regla de Simpson de 1/3 en el intervalo  $[-1,0]$ , la regla del trapecio en el intervalo  $[0,1]$  y la regla de Simpson de 3/8 en el intervalo  $[1,3.25]$ . Así, se tiene las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{-1}^0 f(x)dx \approx \frac{0 - (-1)}{6} [f(-1) + 4f(-0.5) + f(0)] \approx -1.41667$$

$$I_2 = \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1-0}{2} [f(0) + f(1)] \approx 0.25$$

$$I_3 = \int_1^{3.25} f(x)dx \approx \frac{3.25-1}{8} [f(1) + 3f(1.75) + 3f(2.5) + f(3.25)] \approx 0.210938$$

Por lo tanto, la integral buscada es la suma de las tres integrales anteriores:

$$\int_{-1}^{3.25} f(x)dx \approx -1.41667 + 0.25 + 0.210938 \approx -0.955729$$

Vale la pena comentar que no siempre tiene que suceder que se apliquen exactamente las tres reglas. En realidad, esto depende de cómo se encuentran espaciados los intervalos de la tabla de datos y la forma que pueda tener la curva.

**Ejemplo 6:** Calcular la siguiente Integral:  $\int_1^3 \frac{\log(x)}{\sqrt{x^3}} dx$ , correspondiente al área bajo la curva mostrada en la Fig. 7 entre los límites 1 y 3.

Intervalo:  $1 \leq x \leq 3$

Método: Regla de Simpson

$n = 2$  sub intervalos, donde  $dx = (b-a)/n=1$ .

Se utiliza la regla de Simpson con  $dx = 1.0$  ó  $h=0.5$ ,  $n = 2$  sub intervalos y la tabla

de valores para  $f(x) = \int_1^3 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3}} dx$

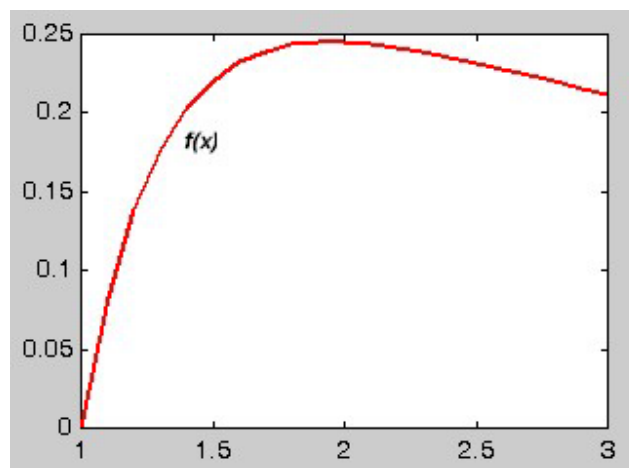


Fig. 7

TABLA de valores

$x$	$f(x)$	$y_i$
1.0	0.0000000000000000	$Y_0$
1.5	0.22070724963720	$Y_1$
2.0	0.24506453586714	$Y_2$
2.5	0.23180525693000	$Y_3$
3.0	0.21142803353252	$Y_4$

<sup>YS</sup>  
El resultado aplicando la siguiente fórmula sería: (*Tenga en cuenta que solo se trabajan 2 sub áreas*)

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [y_0 - y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2(y_2 + y_4)]$$

$$I = 0.50/3 * (0.0000000000000000 - 0.21142803353252 + \dots \\ 4 * (0.22070724963720 + 0.23180525693000) + \dots \\ 2 * (0.24506453586714 + 0.21142803353252))$$

$$I = 0.41860118858927$$

## Programa en diferentes lenguajes

### Programación del método de Simpson en lenguaje C.

Suponga que la función  $f$  evalúa la función  $f(x)$ . Entonces la siguiente fórmula permite calcular el área de cada una de las secciones:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(a) - f(b) + \sum_{i=1}^n [4f(a + (2i-1)dx/2) + 2f(a + idx)] \right]$$

Programa en lenguaje C: Se supone que la función *area* se debe llamar con los parámetros  $a, b$  y  $n$ , que serían límite inferior, límite superior y número de sub áreas respectivamente.

```
double area(double a, double b, int n)
{
    double dx= (b-a)/n;
    double sum= f(a)-f(b);
    for (int i=1; i<=n; i++)
    {
        double ximpar=a+(2*i-1)*dx;
        double xpar= (a+i*dx);
        sum+= 4*f(ximpar)+2*f(xpar);
    }
    return dx*sum/6;
}
double f(double x)
{
    double y;
    y = ... // Se describiría la función a la cual se le desea calcular la integral
    return y; }

```

Esta solución es análoga a la que se programó para buscar los ceros de una función. El problema de esta solución, es que cuando se desea calcular la integral de varias funciones distintas, hay que programar una función para calcular el área de cada función.

Si se programa para MatLab el programa sería

```
function area=simpson(a,b,n)
    dx=(b-a)/n;
    sum= f(a)-f(b)
    for i=1:n,
        ximpar=a+(2*i-1)*dx/2
        xpar= a+i*dx
        sum=sum+ 4*f(ximpar)+2*f(xpar);
    end
    area= dx*sum/6
```

Y la función  $f$  estaría dada por (Como caso particular se coloca  $x^2-4$ , pero solo cambie la función  $f$  y le integra lo que desee):

```
function y=f(x)
    y =x^2-4; %Puede cambiar esta función
```

La jerarquía de clases para C.

Se crea una clase base abstracta denominada *Simpson*, que defina la función miembro *integral* que calcula la integral definida de cualquier función  $f(x)$  por el procedimiento de Simpson.

```
public abstract class Simpson
{
    public double integral(double a, double b, int n)
    {
        double dx=(b-a)/n;
        double suma=f(a)-f(b);
        for(int i=1; i<=n; i++)
        {
            suma+=4*f(a+(2*i-1)*dx) + 2*f(a+i*dx);
        }
        return (suma*dx/6);
    }
    abstract public double f(double x);
}
```

En la clase derivada *Funcion* de *Simpson* se definirá la función  $f(x)$  cuya integral se desea calcular.

```
public class Funcion extends Simpson
{ public double f(double x)
  { return Math.cos(x);
  }
}
```

Para hallar la integral definida de esta función entre los límites 0 y  $\pi/2$ , se crea un objeto de la clase *Funcion* mediante *new* y se llama desde este objeto a la función *integral* pasándole en el primer argumento el límite inferior “0”, en el segundo el límite superior, “ $\pi/2$ ”, y por último, el número de divisiones del intervalo “10”.

```
double resultado=new Funcion().integral(0.0, Math.PI/2, 10);
System.out.println("integral "+resultado);
```

Comparando los resultados obtenidos por este procedimiento y por el procedimiento de los trapecios se puede comprobar la mayor exactitud de éste último.